14 ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

14.1 Понятие дифференциального уравнения с частными производными

Уравнение, связывающее неизвестную функцию $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, независимые переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и частные производные от неизвестной функции, называется дифференциальным уравнением с частными производными.

Оно имеет вид

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \ldots, \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}) = 0$$

Порядок старшей частной производной, входящей в уравнение, называется порядком уравнения с частными производными.

14.2 Классификация линейных дифференциальных уравнений с частными производными II порядка

Рассмотрим дифференциальное уравнение в частных производных II порядка с двумя независимыми переменными

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0 \qquad (119)$$

где x,y – независимые переменные, $u(x, y)$ - искомая функция, $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, u_y = \frac{\partial u}{\partial y}, u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, u_{yy} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ - частные производные от искомой функции.

Решением уравнения (119) называется функция $u(x, y)$, обращающая это уравнение в тождество.

Уравнение (119) называется линейным, если оно первой степени относительно искомой функции и всех ее производных и не содержит их произведений. Линейное уравнение можно представить в виде:

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu = F(x, y) \qquad (120)$$

причем A, B, C, a, b, c - зависят лишь от x, y.

Обозначим $D = AC - B^2$. В зависимости от знака функции D уравнение (120) относится в некоторой заданной области к одному из следующих типов.

$D > 0$ - эллиптический тип;

$D = 0$ - параболический тип;

$D < 0$ - гиперболический тип.

Тип линейного уравнения (2) является его важной особенностью и сохраняется при любом невырожденном преобразовании:

$\xi = \varphi(x, y); \quad \eta = \psi(x, y)$, т.е. если $\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(x, y)} \neq 0$

14.3 Примеры основных типов уравнений с частными производными

Волновое уравнение.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \tag{121}$$

где c - скорость распространения волны в данной среде. Это уравнение возникает при изучении различных видов волн – упругих, звуковых, электромагнитных, а также других колебательных явлений. Это классический пример уравнения гиперболического типа.

В одномерном случае уравнение (121) называют уравнением колебаний струны: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. А в двумерном, уравнением колебаний мембраны: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$.

Уравнение теплопроводности.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \tag{122}$$

a называют коэффициентом теплопроводности. Данное уравнение описывает процессы распространения тепла в однородном изотропном теле, а также явление диффузии.

В одномерном случае уравнение (122) принимает вид $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и описывает распространение тепла в тонком однородном стержне, а в двухмерном: $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$ - распространение тепла в тонкой однородной пластине. Уравнение (122) является уравнением параболического типа.

Уравнение Пуассона.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-f(x,y,z) \qquad (123)$$

описывает стационарный (установившийся) процесс распространения тепла в однородном изотропном теле.

При отсутствии источников тепла внутри тела уравнение (5) переходит в уравнение Лапласа.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0 \qquad (124)$$

Уравнению Лапласа удовлетворяют также потенциалы поля тяготения и стационарного электрического поля, в которых отсутствуют массы и, соответственно, электрические заряды. Уравнения (123) и (124) – примеры уравнений эллиптического типа.

Каждое из уравнений (121)-(124) имеет бесчисленное множество частных решений. При решении конкретной физической задачи необходимо из всех этих решений выбрать то, которое удовлетворяет некоторым дополнительным условиям, вытекающим из ее физического смысла. Такими дополнительными условиями чаще всего являются так называемые граничные условия, т.е. условия, заданные на границе рассматриваемой среды, и начальные условия, относящиеся к одному какому-нибудь моменту времени, с которого начинается изучение данного физического явления.

Математическая задача, имеющая своей целью описать действительность, должна удовлетворять следующим трем требованиям.

1. Решение должно существовать.
2. Решение должно быть единственным.
3. Решение должно быть устойчивым, т.е. малые изменения любого из данных задачи должны вызывать соответственно малые изменения решения.

Три вышеназванные требования можно объединить в одно: корректно поставленная задача.